

第二十届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A (小学高年级组)

(时间: 2015 年 4 月 11 日 10: 00~11: 30)

一、填空题 (每小题 10 分, 共 80 分)

1. 计算: $84\frac{4}{19} \times 1.375 + 105\frac{5}{19} \times 0.8 = \underline{\hspace{2cm}}$

【考点】计算、分数计算

【难度】☆☆

【答案】200

【分析】原式 $= (80 + \frac{80}{19}) \times \frac{11}{8} + (105 + \frac{5}{19}) \times \frac{4}{5}$
 $= 110 + \frac{110}{19} + 84 + \frac{4}{19}$
 $= 200$

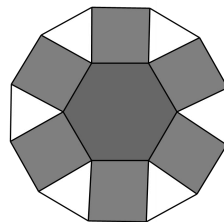
2. 右图是用六个正方形、六个三角形、一个正六边形组成的图案，
正方形边长都是 2cm，这个图案的周长是 $\underline{\hspace{1cm}}$ cm.

【考点】几何、多边形周长

【难度】☆☆

【答案】24

【分析】正十二边形边长与正方形边长相等，每条边都是 2，周长是： $12 \times 2 = 24$.



3. 某项工程需要 100 天完成，开始由 10 个人用 30 天完成了全部工程的 $\frac{1}{5}$ ，随后再增加 10 个人来完成这项工程，那么能提前 $\underline{\hspace{1cm}}$ 天完成任务.

【考点】应用题、工程问题

【难度】☆☆

【答案】10

【分析】假设每人每天的工作效率是 a 份，全部的工作总量是 $10a \times 30 \div \frac{1}{5} = 1500a$ (份)；
增加 10 人后完成的天数是： $(1500a - 30 \times 10a) \div (10a + 10a) = 60$ (天)
提前 $100 - 30 - 60 = 10$ (天) 完成.

4. 王教授早上 8 点到达车站候车, 登上列车时, 站台上时钟的时针和分针恰好左右对称, 列车 8 点 35 分出发, 下午 2 点 15 分到达终点站. 当王教授走下列车时, 站台上时钟的时针和分针恰好上下对称, 走出车站时恰好 3 点整. 那么王教授在列车上的时间共计 _____ 分钟.

【考点】行程、时钟问题

【难度】☆☆☆☆

【答案】360

【分析】登上列车时, 时钟的时针和分针恰好左右对称, 8 点整是时针和分针的夹角是 120° .

$$120 \div (6 + 0.5) = \frac{240}{13} \text{ (分)}, \text{ 此时是 } 8 \text{ 点 } \frac{240}{13} \text{ 分}.$$

下午 2 点 15 分, 时针和分针的夹角是 $15 \times 6 - (60 + 0.5 \times 15) = 22.5^\circ$ (度).

走到站台时恰好是上下对称: $22.5 \div (6 + 0.5) = \frac{45}{13}$ (分), 此时是下午 2 点 $\frac{240}{13}$ 分.

王教授在列车的时间是 6 个小时, 共计 360 分.

5. 由四个非零数字组成的没有重复数字的所有四位数的和为 73326, 则这些四位数中最大的是 _____.

【考点】数论、位值原理

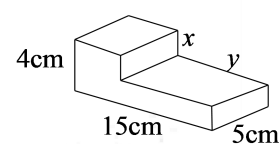
【难度】☆☆☆

【答案】5321

【分析】4 个非零数字一共组成了 24 个四位数, 由于每个数字在每位上均出现 6 次, 则 24 个数和为 $6 \times (a + b + c + d) \times 1111 = 73326$, 得 $a + b + c + d = 11$, 此时只有数字 1、2、3、5. 这些四位数中最大的是 5321.

6. 如右图所示, 从长、宽、高分别为 15cm, 5cm, 4cm 的长方体中切割走一块长、宽、高分别为 ycm, 5cm, xcm 的

长方体 (x, y 为整数), 余下部分的体积为 120cm^3 , 那么 $x + y =$.



【考点】几何、长方体和正方体

【难度】☆☆

【答案】15

【分析】 $15 \times 5 \times 4 - y \times 5 \times x = 120$ 解得 $xy = 36$; $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$, 因为 x, y 为整数, 且 $x < 4, y < 15$, 所以 $x = 3, y = 12$. $x + y = 15$

7. 一次数学竞赛有 A 、 B 、 C 三题, 参赛的 39 个人中, 每个至少答对了一道题. 在答对 A 的人中, 只答对 A 的比还答对其它题目的多 5 人; 在没答对 A 的人中, 答对 B 的是答对 C 的 2 倍; 又知道只答对 A 的等于只答对 B 的与只答对 C 的人数之和, 那么答对 A 的最多有 _____ 人.

【考点】组合、容斥原理、最值问题

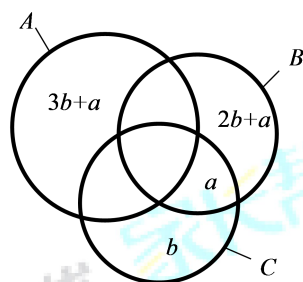
【难度】☆☆☆☆

【答案】23

【分析】根据题意得, 如下图所示: 只答对 A 的人数是 $3b+a$, 答对 A 还答对其他题目的人数是 $3b+a-5$. 所有有: $3b+a+3b+a-5+3b+2a=39$.

化简得 $4a+9b=44$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=11 \\ b=0 \end{cases}$,

答对 A 的人共 $3b+a+3b+a-5=6b+2a-5$, 最大值是 $6 \times 4 + 2 \times 2 - 5 = 23$ (人).



8. 甲、乙进行乒乓球比赛, 三局两胜制, 每局比赛中, 先得 11 分且对方少于 10 分者胜; 10 平后多得 2 分者胜. 甲、乙二人得分总和都是 30 分, 在不计比分先后顺序时, 三局的比分共有种情况.

【考点】计数、体育比赛的数学问题

【难度】☆☆☆

【答案】16

【分析】 $30 < 3 \times 11$, 三局中其中一个人胜了两局, 所以至少有两个分数不小于 11, 甲得分总和是 30: $30 = 11 + 9 + 10$, 乙对应的得分是: $30 = 7 + 10 + 12$; 对应的比分是:

$$\begin{cases} 11:7 \\ 9:11 \\ 10:12 \end{cases}, \text{之后 } 7, 9 \text{ 依次减 } 1, 10 \text{ 和 } 12 \text{ 依次加 } 1;$$

$$\begin{cases} 11:6 \\ 8:11 \\ 11:13 \end{cases}, \begin{cases} 11:5 \\ 7:11 \\ 12:14 \end{cases}, \begin{cases} 11:4 \\ 7:11 \\ 13:15 \end{cases}, \begin{cases} 11:3 \\ 6:11 \\ 14:16 \end{cases}, \begin{cases} 11:2 \\ 5:11 \\ 15:17 \end{cases}, \begin{cases} 11:1 \\ 4:11 \\ 16:18 \end{cases}, \begin{cases} 11:0 \\ 3:11 \\ 17:19 \end{cases},$$

上面 8 种都是乙取得了胜利, 甲取得胜利对应的也是 8 种, 共计 $8 \times 2 = 16$ 种.

二、解答下列各题（每小题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 两个自然数之和为 667，它们的最小公倍数除以最大公约数所得的商等于 120，求这两个数.

【考点】数论、短除模型

【难度】☆☆☆

【答案】115,552 或 232,435.

【分析】设这两个数是 a 、 b ，有 $\frac{m|a}{x} \frac{b}{y}$ ，有 $a = mx$ 、 $b = my$ ， $[a, b] = mxy$ 、 $(a, b) = m$

$$\text{得} \begin{cases} m(x+y) = 667 \\ \frac{mxy}{m} = xy = 120 \end{cases}, \begin{cases} m(x+y) = 667 = 23 \times 29 \\ xy = 120 \end{cases}, x, y \text{ 是互质。}$$

所以 $120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 5 \times 24 = 8 \times 15$

$$\text{满足要求的是} \begin{cases} x+y = 24+5 = 29 \\ m = 23 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y = 8+15 = 23 \\ m = 29 \end{cases}$$

此时对应的数是 115,552 或 232,435.

10. 酒店有 100 个标准间，房价为 400 元/天，但入住率只有 50%，若每降低 20 元的房价，则能增加 5 间入住，求合适的房价，使酒店收到的房费最高.

【考点】组合、最值

【难度】☆☆☆

【答案】22500

【分析】初始状况是：400 元、50 间，

设降价了 x 个 20 元，

房费是： $(400 - 20x)(50 + 5x) = 100(20 - x)(10 + x)$

而 $(20 - x) + (10 + x) = 30$ ，和一定，差小积大， $20 - x = 10 + x = 15$ 时最大；

所以此时的房价最高是： $100 \times 15 \times 15 = 22500$ （元）.

11. 如图，长方形 $ABCD$ 的面积是 56cm^2 ， $BE=3\text{cm}$ ， $DF=2\text{cm}$ ，请你回答：三角形 AEF 的面积是多少？

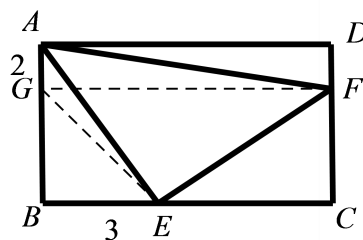
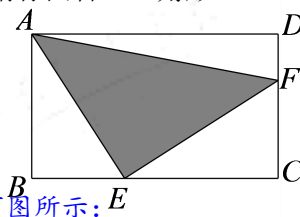
【考点】几何、一半模型

【难度】☆☆☆

【答案】25

【分析】过 F 点做 AD 的平行线，交于 AB 于 G 点；连接 GE ；如下图所示：

四边形 $AGEF$ 是长方形的一半，三角形 AEF 的面积是 $\frac{56}{2} - \frac{2 \times 3}{2} = 25$.



12. 当 n 取遍 $1, 2, 3, \dots, 2015$ 中所有的数时, 形如 $3^n + n^3$ 的数中能够被 7 整除的有多少?

【考点】同余

【难度】☆☆☆

【答案】288

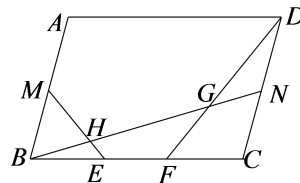
【分析】 3^n 除以 7 的余数以 6 为周期, 3、2、6、4、5、1; n^3 除以 7 的余数以 7 为周期, 1、1、6、1、6、6、0, 则总周期为 42, 列表

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 |
| 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 |
| 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 |

$$2015 \div 42 = 47 \dots 41, \quad 47 \times 6 + 6 = 288$$

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 在右图中, $ABCD$ 是平行四边形, $AM = MB$, $DN = CN$, $BE = EF = FC$, 四边形 $EFGH$ 的面积是 1, 求平行四边形 $ABCD$ 的面积.



【考点】比例模型

【难度】☆☆☆

【答案】 $\frac{80}{9}$

【分析】由风筝模型,

$$\frac{BH}{HN} = \frac{S_{\triangle BME}}{S_{\triangle NME}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{BG}{GN} = \frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle NDF}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{1}$$

由鸟头模型

$$S_{\triangle BFG} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} S_{\triangle BCN} = \frac{8}{15} S_{\triangle BCN}, \quad S_{\triangle BEH} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} S_{\triangle BCN} = \frac{1}{12} S_{\triangle BCN}$$

$$\text{所以 } S_{EFGH} = \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{12} \right) S_{\triangle BCN} = \frac{27}{60} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{9}{80} S_{ABCD}, \quad S_{ABCD} = \frac{80}{9}$$

14. “虚有其表”，“表里如一”，“一见如故”，“故弄玄虚”四个成语中每个汉字代表 11 个非零连续自然数中的一个，相同的汉字代表相同的数，不同的汉字代表不同的数，且“表”>“一”>“故”>“如”>“虚”，且各个成语中四个汉字所代表的数的和都是 21，则“弄”可以代表的数最大是多少？

【考点】最值问题

【难度】☆☆☆☆

【答案】9

【分析】为表述方便，按汉字出现顺序设这十一个数分别为 $A/B/C/D/E/F/G/H/I/J/K$ ，总和设为 S ，则，弄是“ J ”，有

$$\begin{cases} A+B+C+D=21 \\ D+E+F+G=21 \\ G+H+F+I=21 \\ I+J+K+A=21 \\ D>G>I>F>A \end{cases}$$

$$S+D+G+I+F+A=84$$

若从 2 以上开始， $S \geq 77$ ，不可能，所以这十一个数是 1~11

则 $S=66$ ，则 $D+G+I+F+A=18=8+4+3+2+1=7+5+3+2+1=6+5+4+2+1$

分 (1) (2) (3) 情况讨论：

(1) $H=12$ 矛盾

(2) $E=7$ 矛盾

(3)

$$\begin{cases} B+C=14=3+11 \\ E=8 \\ H=10 \\ J+K=16=7+9 \end{cases}$$

J 最大为 9