高中数学竞赛试卷

说明：本试卷分为A卷和B卷：A卷由本试卷的2２题组成，即10道选择题，7道填空题、3道解答题和2道附加题；B卷由本试卷的前20题组成，即10道选择题，7道填空题和3道解答题。

一、选择题（本大题共有10小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题5分，共50分）

1. 化简三角有理式的值为（ A ）

A. 1 B.  C.  D. 1+

解答为 A。



。

1. 若，则是的（ B ）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解答为 B。p成立，所以p 成立，推不出q一定成立。

1. 集合P={}，则集合为（　　D　　）

A.  B. 

C.  D. 

解答：D。 画数轴，由绝对值的几何意义可得，

。

1. 设,为两个相互垂直的单位向量。已知=，=，=r+k.若△PQR为等边三角形，则k，r的取值为（ C ）

A． B．

C． D．

解答．C. ，

即。

1. 在正三棱柱ABC—A1B1C1中，若AB=BB1，则CA1与C1B所成的角的大小是( C )

A．60° B．75° C．90° D．105°

解答：C。建立空间直角坐标系，以所在的直线为轴，在平面上垂直于 的直线为轴，所在的直线为轴。则

，。

1. 设，分别为等差数列与等比数列，且，则以下结论正确的是（ A ）

A.  B.  C.  D. 

解答：A。

。

1. 若的二项式展开式中系数最大的项为（ D ）

A．第8项 B. 第9项 C. 第8项和第9项 D. 第11项

解答：D. ，r=10，第11项最大。

1. 设，，则下述关系式正确的是（ D ）。

A． B.  C.  D. 

解答： D。函数为偶函数，在（0，）上，为减函数，而，

，所以。

1. 下面为某一立体的三视图，则该立体的体积为（ C ）

正视图： 半径为1的半圆以及高为1的矩形

侧视图： 半径为1的圆以及高为1的矩形

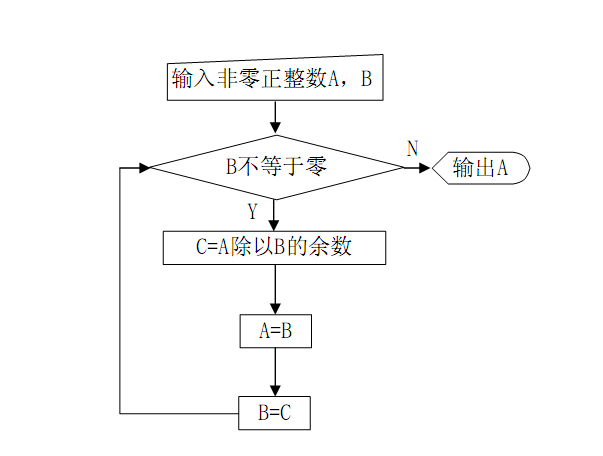
俯视图：

半径为1的圆

A.  B.  C.  D. 

解答：C. 根据题意，该立体图为圆柱和一个1/4的球的组合体。

10. 设有算法如下：

****

如果输入A=144, B=39,则输出的结果是（ B ）

A. 144 B. 3 C. 0 D. 12

解答 B （1）A=144，B=39，C=27：（2）A=39，B=27，C=12：（3）A=27，B=12，C=3：（4）A=12，B=3，C=0。所以A=3。

二、填空题（本大题共有7小题，将正确答案填入题干后的横线上，每空7分，共49分）

11. 满足方程所有实数解为。

解答 变形得，解得

。

12.  函数的最小正周期为.

解答 。

13. 设P是圆上一动点，A点坐标为。当P在圆上运动时，线段PA的中点M的轨迹方程为.

解答 设M的坐标为

，因为P点在圆上，所以 所以P点轨迹为。

14. 设锐角三角形ABC的边BC上有一点D，使得AD把△ABC分成两个等腰三角形，试求△ABC的最小内角的取值范围为 30<x<45或22.5<x<30.

解答 如图，（1）AD=AC=BD；（2）DC=AC，AD=BD。

A

C

D

B

（1）

A

C

D

B

（2）

在（1）中，设最小的角为x，则2x<90,得x<45,又x+180-4x<90,得x>30,所以30<x<45；

在（2）中，设最小的角为x，则3x<90,得x<30,又180-4x<90,得x>22.5,所以22.5<x<30

15. 设z是虚数，，且，则z的实部取值范围为.

解答 设

当，无解；当。

16. 设。如果对任何，都有，则*k*的最小值为 .

解答 

分子，所以k的最小值为。

17. 设，。当函数的零点多于1个时，在以其最小零点与最大零点为端点的闭区间上的最大值为 0或q.

解答 因为函数为偶函数，由对称性以及图象知道，在以其最小零点与最大零点为端点的闭区间上的最大值0或q。

**三、解答题（本大题共有3小题，每题17分，共51分）**

18. 设数列，

问：（1）这个数列第2010项的值是多少；

（2）在这个数列中，第2010个值为1的项的序号是多少.

解（1）将数列分组：

因为1+2+3+…+62=1953；1+2+3+…+63=2016，

所以数列的第2010项属于第63组倒数第7个数，即为。 --------- 10分

（2）由以上分组可以知道，每个奇数组中出现一个1，所以第2010个1出现在第4019组，而第4019组中的1位于该组第2010位，所以第2010个值为1的项的序号为（1+2+3+…+4018）+2010=809428。 ------------ 17分

19. 设有红、黑、白三种颜色的球各10个。现将它们全部放入甲、乙两个袋子中，要求每个袋子里三种颜色球都有，且甲乙两个袋子中三种颜色球数之积相等。问共有多少种放法。

解：设甲袋中的红、黑、白三种颜色的球数为，则有，且

 （\*1）

----------------- 5分

即有

。 （\*2）

于是有 。因此中必有一个取5。不妨设，代入（\*1）式，得到

。 ----------------10分

此时，y可取1，2，…，8，9（相应地z取 9，8，…，2，1），共9种放法。同理可得y=5或者z=5时，也各有9种放法，但有时二种放法重复。因此可得共有

9×3－2 = 25种放法。 ---------------------17分

20. 已知椭圆，以（0，1）为直角顶点，边AB、BC与椭圆交于两点B、C。若△ABC面积的最大值为，求的值。

解： 不妨设的方程，则的方程为。

由得：

由得：

从而有

--------5分



于是 。

令，有

 --------- 10分

因为 时等号成立。

因此当 ------------- 14分

令

 --------- 17分

**四、附加题：（本大题共有2小题，每题25分，共50分。）**

21. 设D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB上的点。记。证明：。

证明 由 ---------5分

。 ---------- 10分

所以，

=。 ----20分

因此，等号成立，当且仅当，D与C重合，或E与A重合，或F与B重合。 ----- 25分

22. （1）设，平面上的点如其坐标都是整数，则称之为格点。今有曲线过格点（n，m），记对应的曲线段上的格点数为N。证明：

。

(2) 进而设*a*是一个正整数，证明：

。

（注表示不超过x的最大整数）

证明 （1）考虑区域且该区域上的格点为nm个。又该区域由区域E：

以及区域F：组成。

在区域E上，直线段上的格点为个，

所以区域E上的 格点数为。 ----------------- 5分

同理区域F上的格点数为。 ----------------- 10分

由容斥原理，。 -------------------------15分

（2）当*a*是一个正整数时，曲线上的点（）都是格点，所以（1）中的N=n。同时，。将以上数据代入（1）得

。 ----------------- 25分